CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR
DE LA VILLE DE PARIS
Ouvert le 24 avril 1985

Epreuve pratique de mathématiques

L'objet du problème est l'étude d'une méthode de calcul numérique des intégrales. Le candidat pourra admettre le résultat d'une question afin d'aborder la suivante, en le précisant clairement sur sa copie.

Pour tout x réel on note E (x) sa partie entière
Rn [X] représente l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n, où n désigne un élément de N^* .

Ière partie

Soit $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ un élément de R^n (les x_i ne sont pas nécessairement distincts).
A ce n-uplet on associe :

- le polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$

- les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$ définies $\begin{cases} \sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \vdots \\ \sigma_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 \cdots \le i_n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} \\ \vdots \\ \sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n \end{cases}$

- les sommes $S_K = \sum_{i=1}^{n} x_i^K$ pour $K \in N^*$

on posera $S_0 = n$

On rappelle que $P(X) = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} + \ldots\ldots + (-1)^K \sigma_K X^{n-K} + \ldots (-1)^n \sigma_n$

1°/ Soit F(X) la fraction rationnelle $\frac{P'(X)}{P(X)}$, où P'(X) représente le polynôme dérivé de P(X).

a) Soit x_i une racine de P d'ordre α. Vérifier que x_i est pôle simple de F.

b) En déduire la décomposition en éléments simples de F(X) :

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - x_i}$$

2°/ a) Développer en série entière la fonction de la variable réelle x définie par : $x \longmapsto \frac{x}{1 - x_i x}$

b) On désigne par H la fonction définie sur R par $\begin{cases} H(0) = 0 \\ \text{pour } x \neq 0 \quad H(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$

Montrer qu'il existe un réel strictement positif a, tel que H (x) soit la somme d'une série entière sur] - a, a [. Exprimer les coefficients de cette série entière en fonction des S_K .

3°/ Pour tout réel x non nul, on définit $h_1(x)$ et $h_2(x)$ par les relations :

$h_1(x) = x^n P'\left(\frac{1}{x}\right)$ et $h_2(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Montrer que h_1 et h_2 sont des fonctions polynômes, prolongeables par continuité en 0 et vérifient l'égalité : $\forall x \in]-a, a[\quad h_1(x) = h_2(x) \cdot H(x)$

b) En déduire les formules de Newton :

$$\forall K \in \{1, 2, \ldots\ldots, n\} \quad S_K - S_{K-1}\,\sigma_1 + S_{K-2}\,\sigma_2 + \ldots + (-1)^{K-1} S_1 \sigma_{K-1} + (-1)^K K \sigma_K = 0$$

IIème partie

On cherche à résoudre le problème (P) : existe-t-il un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de R^n vérifiant les 2 conditions :

$$\begin{cases} x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_n \\ \forall P \in R_n[X] \quad \displaystyle\int_{-1}^{+1} P(x)\,dx = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \end{cases}$$

1°/ Montrer que cette condition est équivalente au système (S) :

$$\forall p \in \{1, 2, \ldots. n\} \quad \int_{-1}^{+1} x^p\,dx = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^p \qquad (S)$$

2°/ Vérifier que si $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ est solution de problème, il en est de même de $(-x_n, -x_{n-1}, \ldots, -x_1)$

3°/ On utilise désormais les notations de la Ière partie

a) Montrer que le système (S) équivaut à un système linéaire (S'), que l'on explicitera, dont les inconnues sont $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ [utiliser pour cela la notation $Ip = 1 + (-1)^p$]

b) Montrer que, si un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ est solution du problème (P), il est unique et que $x_i = -x_{n+1-i}$ pour tout i compris au sens large entre 1 et n.

c) Résoudre le problème (P) pour $n = 1$

On suppose dans la suite de cette partie $n \geqslant 2$.

4°/ Montrer que le système (S') peut se réduire au système (S") :

$$(S'') \quad \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_5 = \ldots\ldots\ldots = \sigma_{1+2E\left(\frac{n-1}{2}\right)} = 0. \\ \frac{1}{3} = \frac{-2\sigma_2}{n} \\ \forall K \in [2, E\left(\frac{n}{2}\right)] \quad \frac{1}{2K+1} + \frac{\sigma_2}{2K-1} + \frac{\sigma_4}{2K-3} + \ldots\ldots \frac{\sigma_{2K-2}}{3} = -\frac{2K}{n}\,\sigma_{2K} \end{cases}$$

5°/ Résoudre (S") dans les cas $n = 2, 3, 4, 5$.

En déduire la solution du problème (P) dans ces cas ; on donnera les valeurs exactes puis approchées des x_i.

IIème partie application numérique

On se place désormais dans le cas où le problème posé au cours de la deuxième partie admet des solutions. On considère alors la valeur approchée $I_n(f)$ de $\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx$, où f est une partie continue de $[-1, +1]$ dans R, définie par :

(1) $$I_n(f) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$ ($(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ étant le n-uplet solution du problème (P))

1°/ Soit f la fonction définie par $\forall x \in [-1, +1]$ $f(x) = \frac{1}{2 + \sin x}$

a) Calculer la valeur exacte, puis numérique de $I = \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx$.

b) Calculer les valeurs numériques de $I_1(f)$, $I_3(f)$, $I_5(f)$

2°/ a) Montrer que le calcul $\int_a^b f(t)\,dt$, où f est une fonction continue de $[a,b]$ dans R, peut se ramener, grâce à un changement de variable simple au calcul de l'intégrale d'une fonction définie sur $[-1, +1]$.

b) En déduire une formule généralisant la formule (1) et permettant d'obtenir une valeur approchée de $\int_a^b f(t)\,dt$. On notera $\mathcal{J}_{n,[a,b]}(f)$ cette valeur approchée ; ainsi $\mathcal{J}_{n,[-1+1]}(f)$ n'est autre que $I_n(f)$

c) Donner la valeur numérique de $\mathcal{J}_{3,[-1,0]}(f) + \mathcal{J}_{3,[0,1]}(f)$, où f est la fonction définie à la 1ère question de la IIIème partie. Comparer cette valeur à $I_5(f)$.